MORE™

Comment calculer le taux réel d'un indice actions avec un historique de performances et de prix

Objet. Calculer le taux de rendement des actions, ou le « coût du capital », pose de nombreuses difficultés. L'industrie financière faciliterait les décisions de ses clients et les siennes en ayant davantage recours à cette notion, qui permettrait de comparer les marchés actions entre eux et aux autres classes d'actifs.

Cette note présente une méthode de calcul d'une série de rendement réels, en prenant comme seules données un historique de prix et de performances *total return*. Il existe des méthodes de calcul basées sur la valeur actuelle des dividendes ou des bénéfices anticipés, mais elles posent des problèmes pratiques et théoriques. La présente note souhaite échapper aux débats sur la validité du *Price Earning* comme mesure de la rentabilité, et sur les biais comptables qui affectent les données financières. En ce plaçant dans un cadre de taux actuariels, on ne s'intéresse qu'au lien entre performances et taux de rendement.

Résumé

On cherche à approximer le S&P500 depuis 1946 (données de M. Shiller) par une rente à revenu croissant. Connaissant son prix, le prochain dividende et le taux de croissance des dividendes, la formule de Gordon donne le taux actuariel correspondant, qui est le rendement qu'un investisseur peut attendre en achetant l'indice.

L'idée est de chercher des taux qui expliquent les performances, en exploitant le lien entre performance et taux de rendement, donné par la grande formule de l'actuariat :

Performance pendant Δt = taux de rendement au départ x Δt
– sensibilité au taux x variation du taux de rendement pendant Δt

Par exemple, si le taux de rendement est le même en début et en fin d'année, la performance annuelle égale ce même taux.

Avec cela, et s'étant donné la croissance des dividendes sur la période étudiée, on résout un petit jeu : donnons-nous un taux quelconque en 1946, on aura de proche en proche le taux des années suivantes, grâce à la performance connue de chaque année, et en utilisant l'équation ci-dessus.
On va voir que cet algorithme diverge, sauf pour une plage de taux au départ en 1946. <u>Car en partant d'un taux trop bas, il faut imaginer sans cesse des baisses de taux pour obtenir les performances du S&P. Inversement, en partant d'un rendement trop haut, il faut d'année en année des hausses de taux toujours plus fortes pour expliquer les performances.</u>

Ensuite, ayant cette famille de solutions, toujours pour une croissance donnée, on obtient un moyen simple de choisir la meilleure série.

La dernière difficulté étant de fixer la croissance qui est un paramètre important. Nous déterminons une valeur convenable selon plusieurs critères.

Le résultat est que l'on obtient une série historique de taux de rendement réels jusqu'à aujourd'hui (page 9), expliquant exactement les performances d'année en année du S&P, expliquant bien son historique des prix, en partant seulement des prix et performances passées, et en se passant des *Earnings* et en échappant aux débats théoriques et aux problèmes posés par les chiffres comptables.

PLAN

I Définitions

Prix, dividendes chaque année : ils sont tous réels, c'est-à-dire corrigés de l'inflation. Cela ne sera pas rappelé dans ce qui suit.
Tous les montants donnés ou montrés dans les graphes sont en dollars fin 2009, en utilisant comme déflateur le CPI. On trouvera dans l'Annexe 3 un graphe historique des prix et performances réels du S&P de fin 1946 à mars 2010, en dollars fin 2009.

Rendement réel, ou taux actuariel réel, *real yield* en anglais : le rendement attendu qu'un investisseur peut attendre en achetant l'indice, analogue au taux réel auquel a droit celui qui achète une obligations indexée sur l'inflation. Il est noté y.
Si on suppose que l'indice donne un dividende croissant d'année en année au rythme g, la formule de Gordon donne le taux de rendement en fonction du prix :

$$y = \frac{D_1}{P_0} + g \quad \text{ou inversement} \quad P_0 = \frac{D_1}{y - g}$$

P_0 étant le prix du S&P en début d'année, et D_1 les dividendes qui vont être distribués en fin d'année.

Remarques :

1. Pour une rente à revenu constant, $g = 0$: on a bien $y = \frac{D_1}{P_0}$ ou inversement $P_0 = \frac{D_1}{y}$

2. La formule de Gordon s'écrit souvent avec le taux nominal et la croissance nominale. En enlevant l'inflation des deux côtés on retrouve l'équation avec le taux réel y et la croissance réelle g.

Tout étant corrigé de l'inflation, dans la suite on dira « rendement » ou « taux » pour le rendement réel, ou taux réel.

Performance réelle, ou *real total return*, est le gain constaté après une période, incluant plus-value et dividendes.
En notant P_1 le prix au départ de l'année suivante et avec les notations précédentes :

$$\text{Perf} = \text{plus-value} + \text{dividende} = \frac{P_1 - P_0 + D_1}{P_0}$$

Tout étant corrigé de l'inflation, dans la suite on dira « performance » pour la performance *total return* réelle.

Rente Croissante : actif financier donnant chaque année un revenu croissant régulièrement, au rythme g. La croissance g est un paramètre qu'on se donne.
Avec une rente classique, à revenu constant, on a $g = 0$
La formule de Gordon est exacte pour valoriser une Rente Croissante.

Jumeaux du S&P : Rentes Croissantes définies ci-dessus, pour une croissance g donnée, et ayant tous les ans la même performance *total return* que celle du S&P.

II Lien entre performance et taux de rendement, pour des rentes croissantes

Cas particulier : performance à taux de rendement constant, pour une Rente Croissante

Au départ, la formule de Gordon $P_0 = \frac{D_1}{y-g}$ est un calcul d'actualisation, en sommant les dividendes actualisés au taux *y*. La démonstration est rappelée à l'Annexe 1.1.

Ce calcul n'est pas très parlant, et la formule a des défauts connus : notamment P est très sensible à *g* ; et on a du mal à connaître le dividende moyen, qui croit stationnairement avec les années.

Mais comme toutes les valeurs actuelles, elle a une propriété intéressante, souvent négligée : <u>si le taux actuariel ne change pas entre le début et la fin d'une période donnée, alors la performance annualisée pendant cette période est égale au taux actuariel.</u>

Illustration sur une période d'un an :

Au départ le titre vaut $P_0 = \frac{D_1}{y-g}$, avec D_1 le dividende qui va être reçu en fin d'année.

Au départ de l'année suivante le titre vaut P_1 , en supposant qu'il a le même taux *y* :

$P_1 = \frac{D_2}{y-g} = \frac{D_1.(1+g)}{y-g} = P_0.(1+g)$, avec D_2 le dividende en fin de l'année suivante

Le dividende a crû au rythme de la croissance *g*, et donc le prix aussi.
La performance est égale au prix l'année suivante P_1 , plus le dividende reçu D_1 , le tout ramené au prix au départ P_0 . Il est démontré dans l'Annexe 1.2 que la performance est égale au taux *y* .
<u>La performance de la Rente Croissante = le taux de rendement *y*, si celui-ci est inchangé.</u>

Remarque : c'est bien sûr vrai aussi pour une rente sans croissance ; *g* a d'ailleurs disparu de la performance.

Cas général : performance quand le taux de rendement varie

On recommence mais le taux de rendement varie, de y_0 à y_1 .

Au départ $P_0 = \frac{D_1}{y_0 - g}$, puis au départ de l'année suivante $P_1 = \frac{D_2}{y_1 - g}$

On démontre en Annexe 1.3 que : $\boxed{perf = y_0 - \frac{1+g}{y_1-g}.(y_1 - y_0)}$

Vérification : si $y_1 = y_0$ on retrouve bien $perf = y_0$

On retrouve la grande propriété des taux actuariels :
<u>Performance annuelle = taux de départ – sensibilité x variation de taux</u>

Ici $\boxed{sensibilité = \frac{1+g}{y_1 - g}}$

Usuellement la sensibilité d'une obligation est calculée avec le taux au départ, qu'on connaît, afin d'avoir une approximation linéaire du prix avec le taux.
Dans cette formule vérifiée par les rentes à revenu croissant, la sensibilité utilise le taux en fin de période ; mais l'avantage est que la formule est exacte. Ayant le taux à l'arrivée et la performance, on peut calculer directement le taux de départ. Ou inversement, avec le taux de départ et la performance, on peut calculer directement le taux à l'arrivée.

Exemple d'application de la formule $perf = y_0 - \frac{1+g}{y_1 - g}.(y_1 - y_0)$:

Soit une rente Croissante au rythme de g = 2%.
Sa performance est de 7% en 1 an, mais on ne connaît pas son taux de rendement au départ ni à l'arrivée, bien que l'un donne l'autre.
Voici trois possibilités, choisies pour que la performance soit égale à 7% :
i) le taux est à 7% au départ et un an plus tard
ii) le taux est de 8% en début d'année et un an plus tard il est monté à 8,06%
iii) le taux est à 6% en début d'année et il descend l'année suivante à 5.94%

En appliquant la formule $perf = y_0 - \frac{1}{y_1}.(y_1 - y_0)$ on vérifie $perf = 7\%$:

y_0	y_1	$y_1 - y_0$	*sensi =* *(1+g) / (y₁-g)*	*perf = y₀* *- sensi.(y₁-y₀)*
8.00%	8.06%	0.06%	16.8	8% - 16.8x(0.06%) = 7.00%
7.00%	7.00%	0.00%	20.4	7% - 20.4x(0.00%) = 7.00%
6.00%	5.96%	-0.04%	25.8	6% -28.8x(-0.04%) = 7.00%

Vérification par les prix :
on calcule le prix de la rente croissante en début d'année et un an plus tard, aux différents taux de l'exemple. Il faut fixer le dividende D_1 en fin d'année, on prend 5.00

D_1	y_0	$P_0 = D_1 / (y_0-g)$	$D_2 = D_1.(1+g)$	y_1	$P_1 = D_2 / (y_1-g)$	$perf = (D_1+P_1-P_0)/P_0$
5.00	8.00%	83.33	5.10	8.06%	84.16	(5 + 84.16 - 83.33) / 83.33 = 7.00%
5.00	7.00%	100.00	5.10	7.00%	102.00	(5 + 102 – 100) / 100 = 7.00%
5.00	6.00%	125.04	5.10	5.96%	128.79	(5 + 128.79 – 125.04)/125.04 = 7.00%

On retrouve bien une performance de 7% dans les trois cas.

Cet exemple avec des rentes croissantes renvoie à l'éternelle difficulté à expliquer aux épargnants qu'une mauvaise performance peut s'interpréter de deux manières : soit elle provient d'actifs qui « ne rapportent pas» (ayant un mauvais rendement), ou soit les actifs ont un bon rendement, mais il a monté et cela a abimé la performance.
C'est aussi une difficulté à laquelle sont confrontés les professionnels quand ils regardent les marchés actions, mais que le mot rendement, ou taux actuariel, est absent de l'analyse.

III Obtenir la série de taux de rendement en trois étapes

III. 1 Première étape : Obtenir des séries historiques de taux de rendement à partir d'une série de performances

On a vu avec l'exemple numérique précédent que pour une performance donnée, il y a un ensemble de couples (taux de rendement au départ, taux de rendement à l'arrivée) qui donnent cette performance.

Rappelons qu'on peut utiliser la formule $perf = y_0 - \frac{1+g}{y_1 - g}.(y_1 - y_0)$ de trois manières :

Soit on a y_0 et y_1 , et on calcule la performance.
Soit on a y_0 et la performance, et on calcule le taux à l'arrivée y_1.
Soit on a y_1 et la performance, et on calcule à rebours le taux de départ y_0.

On a remarqué aussi que c'est instable, les couples 6% -> 5.96% , 7% -> 7% ou 8% -> 8.06% donnent tous les trois une performance égale à 7% : si on part d'un taux bas, il faut une baisse du taux pour obtenir de la performance.
L'idée est d'exploiter cette instabilité : partons d'un taux quelconque en 1946, et connaissant les performances annuelles de la rente croissante, en les prenant égales à celles du S&P, on va de proche en proche reconstruire les taux de rendements chaque année. On va voir que si on part d'un taux trop haut, les taux divergent, et que si on part d'un taux trop bas, les taux s'écrasent, en convergeant vers la croissance *g*.

Description de l'algorithme, d'année en année

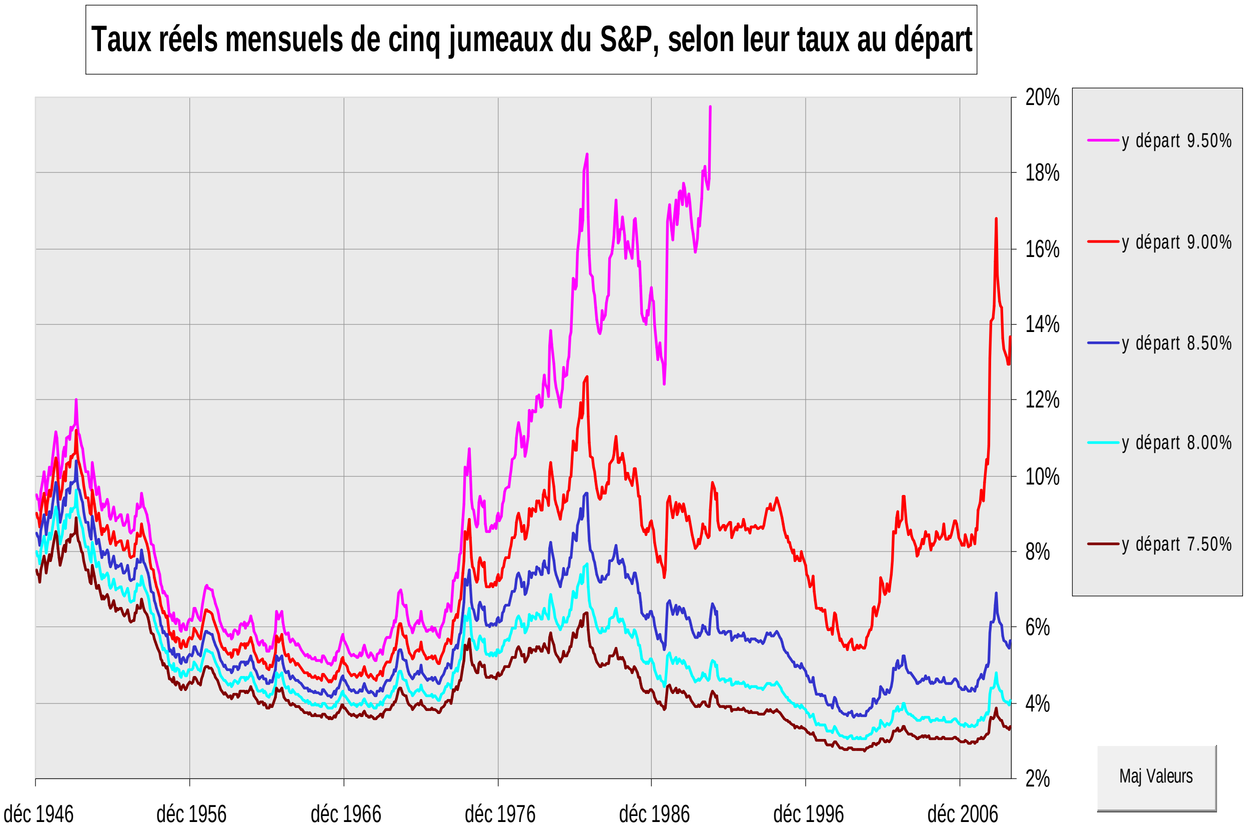
L'algorithme sur les données du S&P depuis l'après-guerre procède comme suit :

a) On se donne un taux de croissance g des dividendes entre fin 1946 et mars 2010. On verra comment déterminer le paramètre *g* au paragraphe IV . L'année 1946 a été choisie parce que la période d'après-guerre est une période homogène, qu'il y a une certaine régularité des dividendes réels. On aurait pu aussi prendre les données historiques du S&P depuis 1871 (données de M Shiller), mais les dividendes pendant l'entre-deux guerres ont une croissance franchement plus basse qu'après 1946. On comprendra à la fin que plus la croissance des dividendes est régulière, mieux l'algorithme fonctionne.

b) Ayant fixé la croissance g, on va étudier une famille de rentes croissantes, « jumeaux du S&P », définis plus haut, qui ont en commun avec le S&P d'avoir tous les ans la même performance *total return* que le S&P. <u>Pour chacun d'entre eux, on fixe un taux de départ à fin 1946</u>. Dans l'exemple on regarde cinq jumeaux du S&P, dont le taux à fin 1946 est respectivement 7.5%, 8%, 8.5%, 9% et 9.5%

c) Pour chacun des jumeaux, connaissant la performance du S&P en 1947, on en déduit le taux réel à fin 1947, car connaissant le taux de début d'année et la performance annuelle, on en déduit le taux en début d'année suivante. Et ainsi de suite jusqu'à mars 2010.

Voir le graphique, avec g = 2.1% , pour les cinq jumeaux du S&P. Les données sont mensuelles pour enrichir le graphique, mais le principe de calculs de mois en mois est le même que ceux d'année en année décrits ci-dessus.



On voit que le taux diverge quand on part de 9.5%.
En partant de 9% on arrive à presque 14% en mars 2010.
En partant de 8.5% rien d'aberrant.
Ensuite les taux sont fortement à la baisse. En partant de taux encore plus bas, le taux converge vers g = 2.1%

Conclusion de la première étape

On a déjà un résultat, car on a établi une plage de taux vraisemblables au départ de 1946, à partir desquels on obtient les taux actuariels jusque 2010. C'est un grand pas, car pour produire la bonne série de taux, il suffit de prendre deux années éloignées dont on pense que le rendement est le même. et de choisir la série qui donne le même taux pour ces deux années-là. Par exemple, on chercherait deux années avec même PE dans un environnement d'inflation analogue.

Dans le paragraphe suivant, on va exhiber la bonne série en se calant sur les prix. On va voir que cela fonctionne, et le résultat est plus clair qu'en prenant deux années à même PE.

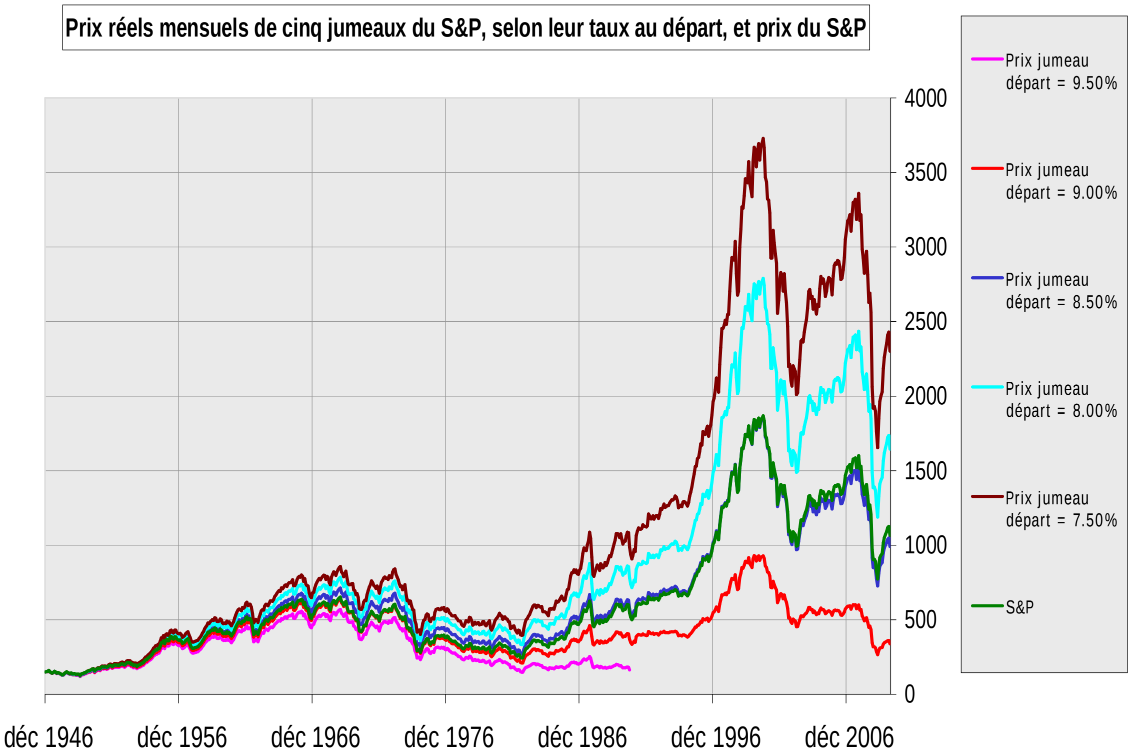
III.2 Deuxième étape : Obtenir la série historique de taux de rendement à partir d'une série de performances et de prix

Pour les cinq rentes croissantes jumelles du S&P qu'on a regardées au III, regardons son historique des prix. Comment l'obtient-on ?
D'abord, les prix historiques étant définis à une constante près (cela ne change rien de multiplier tous les prix historiques par 10), on suppose qu'au départ en 1946 ils ont tous le même prix que celui du S&P.
Avec le prix de 1946, et le taux de rendement qu'on s'est donné, et *g* toujours fixé comme paramètre, on a le dividende de fin 1946 par la formule

$$P_{1946} = \frac{D_{fin1946}}{y_{1946} - g} \quad \text{donc} \quad D_{fin1946} = P_{1946}.(y_{1946} - g)$$

A partir du premier dividende, on a la série des dividendes suivants qui croissent au rythme *g*, d'où chaque année le prix avec le dividende de fin d'année et le taux de rendement obtenu au paragraphe précédent.

Avec les cinq rentes croissantes jumelles du S&P, cela donne les prix suivants, qu'on compare au prix du S&P :



On comprend mieux ce que veulent dire les séries avec des taux trop bas qui convergent vers *g* : c'est le prix qui diverge. Pour la rente croissante dont le taux démarre à 7.5%, le prix diverge au-dessus de celui du S&P. Le terme $\frac{D}{P} \to 0$ et donc $y = \frac{D}{P} + g \to g$

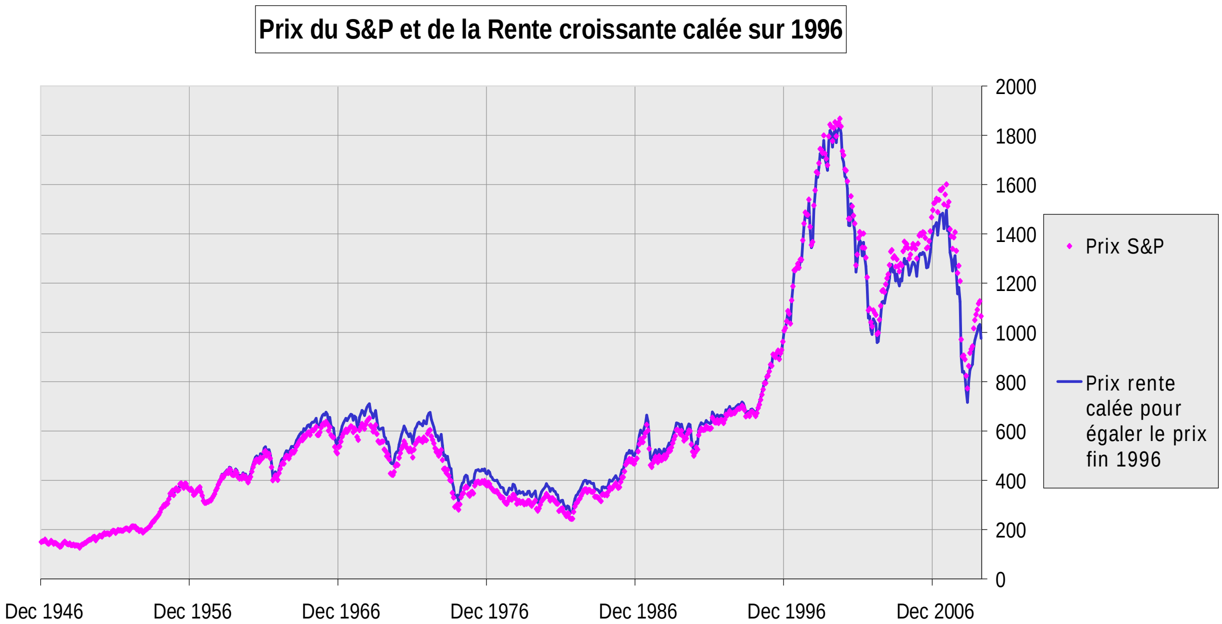
Conclusion sur les séries qui divergent :

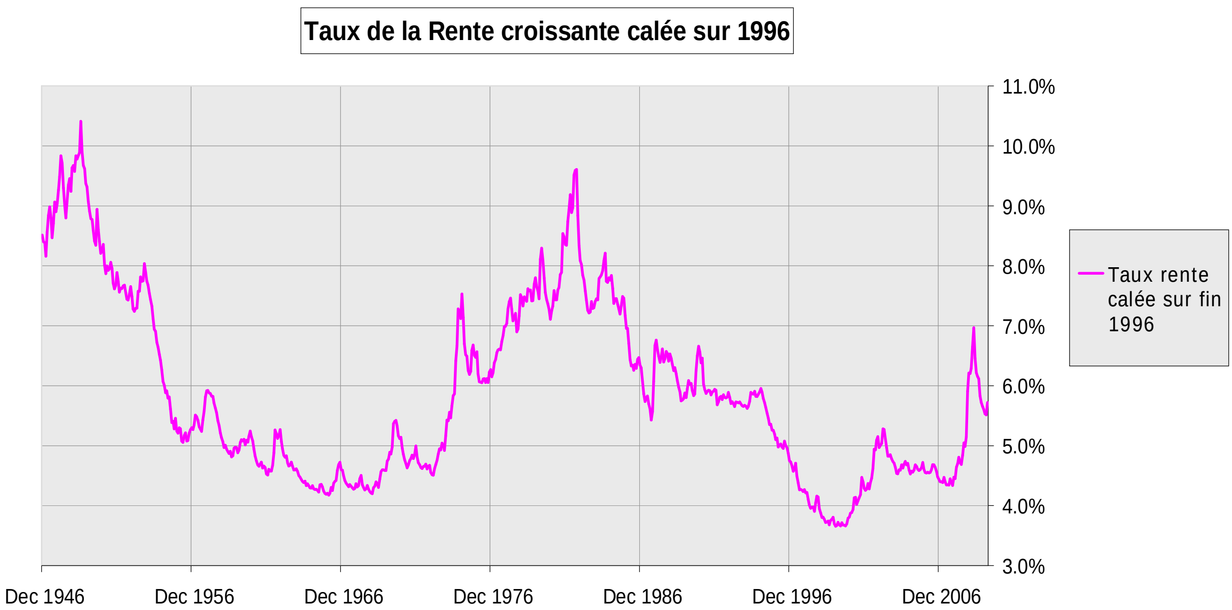
- Si on part d'un taux trop haut, le taux diverge vers l'infini et le prix tend vers zéro.
- Si on part d'un taux trop bas, le taux baisse vers *g* et le prix diverge vers l'infini

Et dans ce graphe on voit surtout qu'il y a un jumeau particulièrement intéressant, dont le prix reste très proche de celui du S&P. C'est celui dont le taux démarre à 8.50% fin 1946. Il a été choisi depuis le début parce que son prix égale celui du S&P en 1996.

On aurait pu aussi caler le prix sur mars 2010, ou sur la moyenne des dix dernières années. Le choix de l'année pour se caler sur le prix du S&P n'est pas crucial. On a choisi 1996 parce que c'est 50 ans tout rond après le départ en 1946 ; parce que la méthode est plus solide en ne prenant pas la dernière donnée ; enfin parce qu'après 1996 il y a eu la période de surinvestissement avant 2000 et ensuite la mode des *buy-backs* en substitut de dividendes. Il est expliqué dans l'Annexe 2 que ce sont des phénomènes qui perturbent la répartition dividendes/hausses des prix dans la performance *total return*.

Voici le prix de la rente sélectionnée comparé à celui du S&P, et son taux :





Conclusion de la deuxième étape

On a donc obtenu une rente croissante
- qui a une performance *total return* égale à celle du S&P tous les mois depuis fin 1946 jusqu'à mars 2010
- qui a un prix toujours proche de celui du S&P. En particulier les deux prix sont égaux au départ fin 1946, et fin 1996, dates qu'on a choisies.
- implicitement, comme les dividendes font la différence entre prix et performances, les dividendes du S&P sont proches du revenu croissant de la rente, au rythme *g*.

On déclare alors que son taux actuariel réel, qu'on connaît par le calcul, est celui du S&P.

Mais n'oublions pas que ces calculs dépendent de la croissance g, qu'on s'est fixé comme paramètre. On va choisir la bonne croissance dans le paragraphe suivant.

III.3 Dernière étape : choisir la croissance

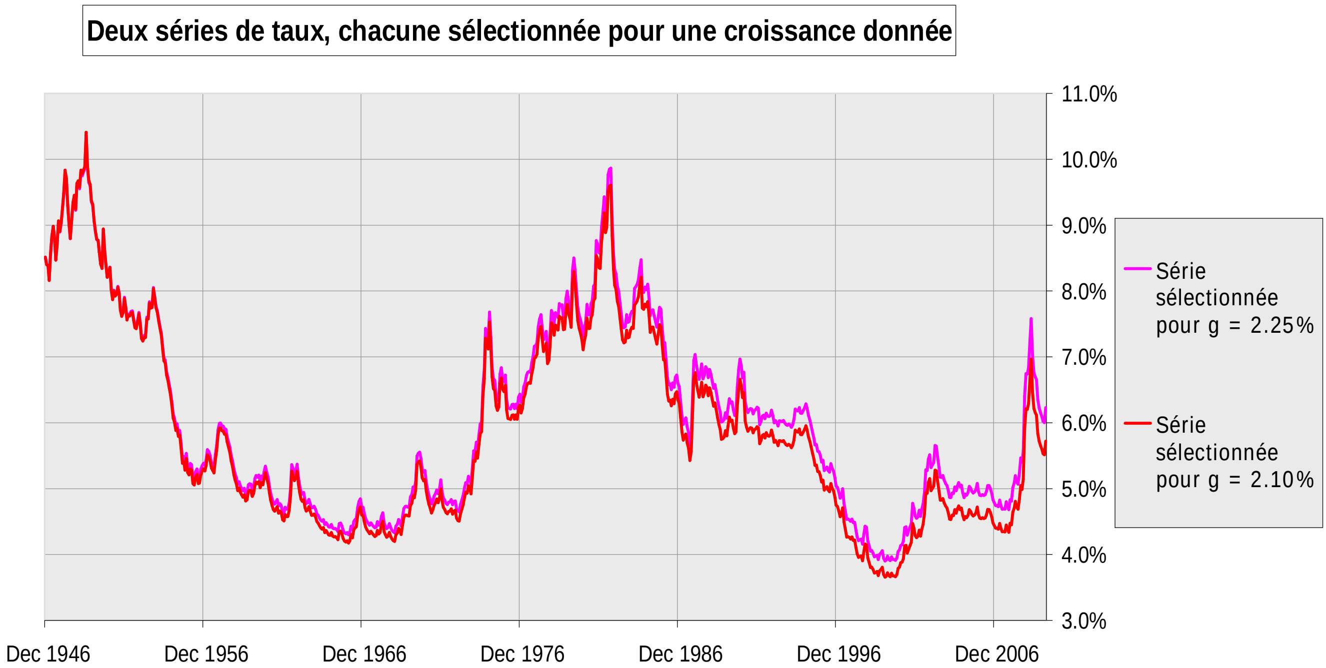
La rente croissante sélectionnée selon la méthode expliquée au paragraphe précédent et qui décrit très bien le S&P, dépend de la croissance *g* qu'on s'est donné comme paramètre.
Il faut décider maintenant quelle bonne valeur de la croissance des dividendes prendre, et mesurer la sensibilité des calculs à cette croissance.

Quelle valeur prendre ? Si on regarde les dividendes de 1946 à 2009, qu'on les lisse pour éviter l'aléa au départ et à la fin, on obtient une croissance annuelle de 1.75%.
Si on fait la même chose avec les bénéfices on trouve une croissance annuelle de 2.25%.
On peut regarder comme M. Shiller la consommation par habitant, qui est un indicateur économique traduisant ce qui serait une croissance équilibrée de ce que les actionnaires peuvent percevoir, on obtient 2.10% depuis 1946. C'est très proche de la croissance par habitant de 2% entre 1946 et 2009.
Les dividendes, on l'a dit, sont des données altérées par les *buy-backs* ou les variations d'investissement, comme cela est expliqué dans l'Annexe 2. Cela ne nous semble pas une bonne idée de prendre alors la croissance des dividendes, qui a été minorée depuis les années 90. Une meilleure méthode est de prendre la croissance des bénéfices : 2.25%.

Ou pour être prudent, prenons le chiffre central de 2.10%. Coïncidence, 2.10% est aussi la croissance (non lissée) des dividendes pendant 50 ans, de 1946 à 1996.
C'est la croissance qui a été prise comme paramètre dans les exemples précédents.

Il reste que les taux actuariels sont sensibles à la croissance qu'on se choisit. Le graphique ci-dessous montre les séries de taux des rentes croissantes sélectionnées pour g = 2.25% ou 2.10% . Pour une plage de 0.15% de la croissance, le taux en 1946 ne bouge quasiment pas, mais celui en mars 2010 varie de 0.5% (sensibilité du taux en 2010 à g : 0.5%/0.15% = 3).

Pour g = 2.25%, le taux réel du S&P en mars 2010 = 6.23%
<u>Pour g = 2.10%, valeur choisie, le taux réel du S&P en mars 2010 = 5.72%</u>



CONCLUSION

Arrivé à la fin de ces étapes, et ayant obtenu une série de taux actuariels historiques de l'après-guerre jusqu'à aujourd'hui, redisons les hypothèses qui sont sous-jacentes à ce modèle :

- Nous avons cherché à voir si le S&P peut être assimilé à une rente croissante, c'est-à-dire dont les revenus croissent à un rythme constant.
- Nous avons cherché à voir plus loin que les dividendes déclarés, qui sont perturbés par les rachats d'actions et les périodes de sur- ou sous-investissement. Implicitement nous cherchons un dividende économique qui croît à un rythme constant.

Et dans ce cadre, nous avons obtenu une rente croissante

- Dont la performance *total return* est égale à celle du S&P tous les mois depuis fin 1946 jusque mars 2010.
- Dont le prix est toujours proche de celui du S&P. En particulier les deux prix sont égaux au départ fin 1946, et fin 1996.

Son prix et son taux actuariel sont dans les graphes de la page 9.

La méthode ne peut prétendre être une mesure absolue du rendement actuariel réel auquel on investit quand on achète le S&P, car elle dépend d'hypothèses sur la régularité des revenus, et elle est sensible à la croissance de ces revenus qu'on se donne. En revanche, comme une vraie balance, elle est précise pour mesurer les variations de rendement.
Et l'investisseur qui se dote de cet instrument pourra interpréter sa performance dans un an : il distinguera deux termes, l'un étant le rendement qu'il a acheté, l'autre la plus ou moins value due à la variation du rendement.

Remerciements : Jean-François Bouilly, Jérôme Olivier, Frédéric Philippe

Annexe 1 : Formulaire et démonstrations

Annexe 1.1 Rappel de la démonstration de la formule de Gordon

Si dans un an l'investisseur touche D_1, dans deux ans $D_2 = D_1.(1+g)$ etc.. , g étant le taux de croissance du dividende.

La valeur actuelle P_0 de ces flux au taux actuariel y**,** s'écrit :

$$P_0 = \frac{D_1}{1+y} + \frac{D_2}{(1+y)^2} + \frac{D_3}{(1+y)^3} + \ldots$$

$$= \frac{D_1}{1+y} + \frac{D_1.(1+g)}{(1+y)^2} + \frac{D_1.(1+g)^2}{(1+y)^3} + \ldots$$

En résolvant la série géométrique on trouve la valeur actuelle P_0 en fonction du taux y :

$$\boxed{P_0 = \frac{D_1}{y-g}}$$

Inversement, connaissant le prix P_0 on a le taux de rendement y :

$$\boxed{y = \frac{D_1}{P_0} + g}$$

La formule peut s'utiliser avec un taux nominal et une croissance nominale, ou un taux réel et une croissance réelle, comme partout dans cette note, puisque seule compte la différence $y - g$.

Annexe 1.2 Calcul de la performance quand le taux y_0 est inchangé : $\boxed{perf = y_0}$

Au départ on a le prix P_0 avec le taux de rendement y_0 , et le dividende en fin d'année D_1 :

$$P_0 = \frac{D_1}{y_0 - g}$$

Au départ de l'année suivante on a le prix P_1 avec le même taux y_0 et le dividende en fin d'année suivante D_2 :

$$D_2 = D_1.(1+g) \quad \text{donc} \quad P_1 = \frac{D_2}{y_0 - g} = \frac{D_1.(1+g)}{y_0 - g} = P_0.(1+g)$$

Le dividende a crû au rythme g, et le prix aussi.
La performance est égale au prix l'année suivante P_1 , plus le dividende reçu D_1 , le tout ramené au prix au départ P_0 .

$$perf = \frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} + \frac{D_1}{P_0} = \frac{P_0.(1+g) - P_0}{P_0} + \frac{D_1}{P_0} = g + \frac{D_1}{P_0}$$

Or $\frac{D_1}{P_0} = y - g$ Donc $Perf = g + y - g$ $\boxed{Perf = y}$

Annexe 1.3 Calcul de la performance quand le taux passe de y_0 à y_1 :

$$\boxed{perf = y_0 - \frac{1+g}{y_1-g}.(y_1-y_0)}$$

Au départ on a le prix P_0 avec le taux de rendement y_0 , et le dividende en fin d'année D_1 :

$$P_0 = \frac{D_1}{y_0-g}$$

Au départ de l'année suivante on a le prix P_1 avec le taux y_1 qui n'est pas égal à y_0 comme dans le cas précédent, et le dividende en fin d'année suivante D_2 :

$$P_1 = \frac{D_2}{y_1-g}$$

$D_2 = D_1.(1+g)$ donc $P_1 = \dfrac{D_1.(1+g)}{y_1-g}$ $\quad \dfrac{P_1}{P_0} = (1+g).\dfrac{y_0-g}{y_1-g}$

On a aussi $\dfrac{D_1}{P_0} = y_0 - g$

Donc

$$perf = \frac{P_1+D_1-P_0}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} + \frac{D_1}{P_0} - 1 = (1+g).\frac{y_0-g}{y_1-g} + y_0 - g - 1 = (1+g).(\frac{y_0-g}{y_1-g} - 1) + y_0$$

$$perf = (1+g).\frac{y_0-y_1}{y_1-g} + y_0$$

On a la performance en fonction du taux au départ y_0 , et de la variation de taux $y_1 - y_0$:

$$\boxed{perf = y_0 - \frac{1+g}{y_1-g}.(y_1-y_0)}$$

La performance annuelle s'analyse comme la somme du taux de rendement au départ, et d'une plus ou moins value due au mouvement de taux, avec une sensibilité égale à $\dfrac{1+g}{y_1-g}$

Cas particulier, pour une rente à revenu constant :

$$perf = y_0 - \frac{1}{y_1}.(y_1-y_0)$$

Et $sensibilit\acute{e} = \dfrac{1}{y_1}$, la sensibilité est l'inverse du taux.

Remarque : avec les obligations ou les zéro-coupons, on n'a pas cette possibilité d'écrire une formule exacte. On écrit aussi $perf = y_0 - sensibilit\acute{e}.(y_1 - y_0)$ mais c'est une approximation linéaire.

Annexe 2 : Le dividende est une donnée altérée ; la donnée significative et inaltérée est la performance.

Les dividendes d'une entreprise ou d'un indice sont des donnée connues et accessibles, qui font la différence entre les prix et les performances *total return*. Mais ils sont perturbés par les rachats d'actions (*buy-backs*), autre moyen de rendre du *cash* aux actionnaires, ou par des investissements supplémentaires, dans les périodes où une entreprise distribuera peu ou rien afin de procéder à un investissement au-dessus du rythme de croisière.

Sans tout démontrer car ce n'est pas l'objet de cette note, nous affirmons que :

- La référence stable et inaltérée est la performance *total return*. C'est la hausse d'un capital économique qui traduit la création de revenus futurs et les variations du coût du capital auquel on actualise ces revenus futurs.
- La performance *total return* se répartit en deux : versements de dividendes et variation du prix des actions. La performance d'une action est accessible à un investisseur qui achète une action et qui ensuite réinvestit les dividendes reçus en actions. De même la performance *total return* d'un indice actions tel que le S&P est accessible, elle est reproduite par les *trackers*.
- La répartition dividendes/prix est perturbée quand l'entreprise procède à des *buy-backs* au lieu de distribuer des dividendes, alors que du point de vue de l'ensemble des actionnaires et de celui de l'entreprise, il y a une totale équivalence. Les *buy-backs* déplacent la répartition dividendes/prix au détriment des dividendes et en faveur des prix, mais ils ne changent pas la performance *total return*.
  Par exemple, supposons qu'il y a eu depuis 1995 1% par an de *buybacks* en substitution de dividendes, pour raison fiscale ou de stock-options. S'ils avaient été interdits aux US, les dividendes cumulés en 15 ans auraient été de 15% plus grands (et on retrouverait un taux de dividende grosso modo centré sur 3%, comme depuis les années 50), mais le prix du S&P serait 15% plus bas. Ce n'est pas démontré ici car ce n'est pas l'objet.
- La répartition dividendes/prix est perturbée quand l'entreprise procède à des investissements supplémentaires, au lieu de distribuer des dividendes.
  Modigliani a montré dans ses travaux avec Miller en 1953-54 que la valeur des actions doit être la même selon que l'entreprise distribue ses bénéfices ou les réinvestit (à condition de se placer dans un cadre simplifié sans frottement fiscal et sans économie d'échelle). Dans le premier cas les actionnaires reçoivent les bénéfices de l'entreprise (qu'ils peuvent capitaliser en réinvestissant leurs dividendes), dans le deuxième l'entreprise a décidé pour eux de capitaliser les bénéfices, et ils profitent de la même performance *total return*.
  Les périodes où les entreprises ne distribuent rien sont un autre exemple qui montre qu'on ne comprend pas ce qui se passe si on ne regarde que les dividendes. Il y a l'exemple de Microsoft qui n'a rien distribué pendant des années. On peut imaginer dans un monde sans frottement fiscal que chaque année il y ait quand même eu un dividende, et qu'à l'assemblée générale les actionnaires aient décidé de procéder à une augmentation de capital pour réinvestir ce dividende. Là encore on aurait des historiques de prix et de dividendes différents, mais la même performance *total return* pour celui qui aurait acheté une action au départ.

Conclusion de l'Annexe 2 :
Quand on regarde l'historique d'une action ou un indice, c'est la performance *total return* qui est la donnée stable et inaltérée, tandis que la répartition entre dividendes et mouvements des prix est perturbée par les *buy-backs*, et les périodes de sur- ou de sous-investissement.
C'est pour cela qu'on a cherché parmi des rentes croissantes dont la performance colle exactement à celle du S&P tous les ans, et qu'on a choisi celle dont les prix soient proches en moyenne de ceux du S&P (implicitement, celle dont les dividendes croissants soient proches de ceux du S&P). On a calé les prix sur la période 1946-1996, en supposant que les dividendes étaient plus représentatifs pendant cette période.
C'est aussi pour cette raison que pour décider de la bonne croissance des dividendes, il vaut mieux regarder du côté de la croissance des bénéfices que de celle des dividendes.

Annexe 3 : Prix et performances historiques

Les données sont en dollars fin 2009. Le S&P a rapporté 6.80% au-dessus de l'inflation entre fin 1946 et mars 2010.

S&P : prix et performances réels depuis 1946 (dollars fin 2009, échelle log)